NIKOLAUS VON KUES

Die mathematischen Schriften

übersetzt von

JOSEPHA HOFMANN

mit einer Einführung und Anmerkungen
versehen von

JOSEPH EHRENFRIED HOFMANN

VERLAG VON FELIX MEINER
HAMBURG

PHILOSOPHISCHE BIBLIOTHEK BAND 231

Im Digitaldruck »on demand« hergestelltes,
inhaltlich mit der 2. verbesserten Auflage von 1980 identisches
Exemplar. Wir bitten um Verständnis für unvermeidliche Abweichungen in der Ausstattung, die der Einzelfertigung geschuldet sind. Weitere Informationen unter: www.meiner.de/bod.

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über ‹http://portal.dnb.de› abrufbar.
ISBN 978-3-7873-0491-2
ISBN eBook: 978-3-7873-2586-3

 Gesamtherstellung: BoD, Norderstedt. Gedruckt auf alterungsbeständigem Werkdruckpapier, hergestellt aus 100 % chlorfrei gebleichtem Zellstoff. Printed in Germany.
www.meiner.de

INHALTSVERZEICHNIS

Oportet autem attingere sensum volentem potius supra verborum vim intellectum efferre quam proprietatibus vocabulorum insistere, quae tantis intellectualibus mysteriis proprie adaptari non possunt.
De doct. ign. I, 2.

Wenn wir den mathematischen Schriften des CUSANERS gerecht werden wollen, müssen wir uns stets vor Augen halten, daß hier nicht der Fachmathematiker zu uns spricht, sondern der Philosoph, dem es letztlich nicht um das reine Fachwissen geht, sondern um die symbolhafte Ausdeutung mathematischer Zusammenhänge. Die Worte in der *Docta ignorantia* I, 11, wo gesagt wird, daß wir im Streben nach der Erfassung göttlicher Wahrheiten die stärkste Unterstützung von der Mathematik erhoffen dürfen — als Gewährsleute werden PYTHAGORAS, PLATON, ARISTOTELES, BOËTHIUS und AUGUSTINUS angeführt — gelten nicht der Fachwissenschaft, sondern der auf mathematische Bezeichnungen und Einsichten zu stützenden Symbolik, wie das in I, 12 des Näheren ausgeführt wird.

Aber der CUSANER begnügt sich nicht mit dieser Auffassung, die das ganze Mittelalter hindurch die herrschende war, sondern er ringt ernsthaft um mathematische Fragestellungen und Beweise, und seine mathematischen Traktate behandeln wirklich mathematische Gegenstände, obwohl sie im Schatten seiner Philosophie stehen. Während REGIOMONTAN, der Fachmathematiker und etwas jüngere Zeitgenosse, das Wissen seiner Zeit in der Trigonometrie, in der Geometrie und in der Zahlentheorie um ein Bedeutendes vermehrt, beschränkt sich der CUSANER ausschließlich auf das Doppelproblem der Ausstrekkung und Quadratur des Kreises, das er von der Abhandlung über die *Geometrischen Verwandlungen* des Jahres

1445 bis zum *Goldenen Satz in der Mathematik* vom Jahr 1459 auf immer wieder neuen Wegen angegangen und behandelt hat. Fast in jeder der elf Schriften, die sich auf diese 14 Jahre verteilen, spricht er ausdrücklich davon, daß er diese mühevollen Untersuchungen nur um eines wichtigen Zweckes willen anstellt; denn es gelte den Zugang zu höheren Wissenszweigen zu gewinnen, und in der letzten Abhandlung, der *Aurea propositio*, steht am Schluß der Hinweis auf den dreieinigen Urgrund, auf den alle höhere Spekulation hinzielen müsse.

So ist die Mathematik für den CUSANER eine Hilfswissenschaft, aber doch eine echte Wissenschaft, deren Eigenart anerkannt und deren Problematik durchaus ernst genommen wird. Deshalb ist es interessant, des Näheren zu verfolgen, wie sich der Philosoph mit dieser Wissenschaft auseinandersetzt und wie er sich mit ihren Ideenbildungen immer besser vertraut macht.

Über das, was der CUSANER von früher her an mathematischem Rüstzeug mitgebracht hat, sind wir nur unzureichend unterrichtet. Als sicher dürfen wir annehmen, daß er bereits während seiner Studienzeit beim obligatorischen Besuch der allgemeinen Vorlesungen in der Artistenfakultät mit den *Institutiones arithmeticae* des BOËTHIUS bekannt wurde, deren zum Teil zahlenmystisch gefärbter Inhalt seinen eigenen Ansichten in besonderem Maße zusagen mochte. Schon in der *Docta ignorantia* wird an mehreren Stellen auf das Gedankengut der *Institutiones arithmeticae* Bezug genommen, vor allem in dem oben erwähnten 11. Kapitel des ersten Buches, und in den späteren Schriften häufen sich derartige Anspielungen.

Sicher hat der CUSANER auch die einfacheren Teile der EUKLID-Übersetzung des CAMPANUS[1] kennengelernt — vielleicht zunächst nicht unmittelbar, sondern in der stark verkürzten Bearbeitung des BRADWARDINE, dessen *Geometria speculativa*[2] als ein brauchbares und hinlänglich einfaches Schulbuch sehr geschätzt wurde. Dieses Werk, dessen Einfluß auf die mathematischen Schriften des CU-

SANERS außerordentlich weit reicht, enthält auch Hinweise auf einige mathematische Stellen bei ARISTOTELES[3]; ferner werden die Hauptsätze aus der damals gerade in lateinischer Übersetzung bekanntgewordenen isoperimetrischen Abhandlung des ZENODOROS wiedergegeben[4]. Besonders interessant ist die Erwähnung der ARCHIMEDISCHEN *Circuli dimensio*[5], über die man auf so engem Raum nicht eingehender berichten könne. BRADWARDINE kennt zwar den Zusammenhang zwischen Kreisumfang und Kreisfläche, hält jedoch den Wert $\pi \approx \frac{22}{7}$ für genau und beruft sich hierfür ausdrücklich auf ARCHIMEDES als Autorität; das wäre nicht möglich gewesen, wenn er wirklich eine lateinische Übersetzung der Abhandlung vor Augen gehabt hätte. Wer sein Gewährsmann war, ist nicht sicher festzustellen.

In der *Docta ignorantia* wird weder EUKLID noch CAMPANUS noch auch BRADWARDINE namentlich erwähnt, aber zwei interessante Einzelheiten stehen vermutlich in engerer Beziehung zu BRADWARDINE bzw. zu CAMPANUS. Die eine findet sich in I, 13, wo der CUSANER jene Kreise betrachtet, die einander in einem Punkte gleichsinnig berühren. Er sieht die gemeinsame Tangente als den größten unter diesen Kreisen an, dem das Maximum an *rectitudo* und das Minimum an *curvitas* zukomme. Die beigesetzte Figur stimmt im wesentlichen mit einer aus der *Geometria speculativa*[6] überein, nicht aber mit jener der Vorlage aus CAMPANUS[7]. Die CUSANISCHE Überlegung mag aus dem ihm vorliegenden Text durch selbständige Weiterbildung entstanden sein.

Eine weitere Bezugnahme auf BRADWARDINE[8] oder CAMPANUS[9] sehen wir im Text der *Docta ignorantia* III, 1, wo die Frage angeschnitten wird, ob man aus der Existenz kleinerer und größerer Werte hinsichtlich einer bestimmten Größe auf die Existenz einer zu ihr gleichen Größe schließen dürfe. Der CUSANER leugnet dies mit aller Entschiedenheit; z. B. dürfe man weder aus der Existenz des einbeschriebenen und umbeschriebenen Quadrats am

Kreise auf die Existenz eines zum Kreise flächengleichen Quadrats schließen[10], noch auch aus der Existenz zweier geradliniger Winkel, von denen der eine kleiner, der andere größer sei als der sog. Inzidenzwinkel (zwischen Kreissehne und Kreisbogen) auf die Existenz eines zum Inzidenzwinkel gleichen geradlinigen Winkels. Auf diese Angelegenheit werden wir unten (s. XX/XXI) noch genauer zurückkommen.

Anscheinend hat sich der CUSANER schon während seiner Studienzeit lebhaft für mathematische Dinge interessiert. Diese Vorliebe hat ihn, der seit 1417 an der Universität Padua die Rechte betrieb, noch im Jahr 1422 — also kurz vor Abschluß seiner Studien — in die mathematischen Vorlesungen BELDOMANDIS geführt, der eben erst die Professur für Musik und Astrologie erhalten hatte, und sich als Verfasser wohldurchdachter und ziemlich selbständiger Lehrbücher[11] eines bedeutenden Rufes erfreute. Unter den Hörern BELDOMANDIS befand sich auch TOSCANELLI, der Sohn eines Florentiner Arztes, mit dem der CUSANER alsbald in enge freundschaftliche und wissenschaftliche Beziehungen trat[12]. TOSCANELLI hatte sich vorzügliches Fachwissen auf dem Gebiete der Mathematik und Astronomie erworben; von ihm hat der CUSANER auf dem Gebiete der exakten Naturwissenschaften viele allgemeine und fachliche Anregungen empfangen. Wie hoch er das Können des klugen Florentiners einschätzte, zeigt uns der Umstand, daß er ihm seine ersten beiden mathematischen Abhandlungen, die *Transmutationes geometricae* und die *Complementa arithmetica*, gewidmet hat.

Ob sich der CUSANER auch unmittelbar nach Abschluß seiner Studien noch mit rein mathematischen Gegenständen befaßt hat, wissen wir nicht. Daß in ihm das Interesse an mathematischen Fragen rege geblieben ist, lehrt uns eine interessante Einzelheit: Im Jahr 1428 hat er sich LULLS Traktat von der *Quadratur und Triangulatur des Kreises* eigenhändig abgeschrieben, und zwar kennzeichnenderweise nur den ersten mathematischen Teil, nicht aber die symbolisch-theologische Fortsetzung[13].

Die LULLSCHE Abhandlung ist vom rein mathematischen Standpunkt aus sehr unbedeutend; sie enthält jedoch einige allgemeine Gedanken, die sich mit der Auffassung des CUSANERS stark berühren. Besonders interessant ist für uns die einleitende Bemerkung[14]: Strecken und Kreisbögen können als ungleichartige Größen nicht ins Verhältnis gesetzt werden, und Bögen sind auch nicht vermittels des Zirkels durch Strecken meßbar. Deshalb muß man als Mathematiker in seinem Sinne an Stelle der wirklichen Strecken und Bögen ihre Ideen setzen und diese in der Vorstellung zum Vergleich bringen.

Mit der Tatsache, daß sich Strecken und Bögen nicht ins Verhältnis setzen lassen, war der CUSANER aus ARISTOTELES wohlvertraut; in *De beryllo* 27 wird sogar ausdrücklich auf eine einschlägige Stelle in den *Metaphysica* verwiesen[15]. Dort wird auch erwähnt, daß diese Inkommensurabilität das Hauptargument des ARISTOTELES gegen die Möglichkeit einer exakten Kreisquadratur sei.

Wahrscheinlich kannte der CUSANER nicht nur einige der einschlägigen Stellen bei ARISTOTELES, sondern auch etwas von den zugehörigen Kommentaren, wie etwa den des BOËTHIUS[16] und den des AVERROËS[17]. Hingegen hatte er von der Quadratur vermittels der Möndchen, die in den *Complementa mathematica* erwähnt wird[18], nur ganz unbestimmte Vorstellungen. Vielleicht lag ihm hierüber nichts anderes vor als die kurze und nichtssagende Bemerkung bei BRADWARDINE[19]: „Bei ARISTOTELES wird auch eine Quadratur vermittels der Möndchen erwähnt, jedoch als unrichtig bezeichnet, und deshalb ist es überflüssig, genauer darauf einzugehen.“ Daraus folgt, daß der CUSANER weder den Kommentar des SIMPLIKIOS zur ARISTOTELISCHEN *Physik* gesehen hat[20], in dem die Möndchenquadratur eingehend behandelt wird, noch auch den des PHILOPONOS zu den *Analytica posteriora*[21], der eine verkürzte Darstellung enthält, und ebensowenig die unter dem Titel *Quadratura circuli per lunulas* umlaufenden lateinischen Fassungen, von denen eine dem ALBERT VON SACHSEN vorlag[22]. Der Traktat ALBERTS zur Kreisquadratur[23] scheint dem CUSANER nicht bekanntgeworden zu sein, und ebensowenig die älteren Studien des FRANCO VON LÜTTICH[24] und des JORDANUS NEMORARIUS[25] zum gleichen Gegenstand.

Auch das (etwas billige) Verfahren LULLS, an Stelle der wirklichen Figuren gedachte treten zu lassen, um vermutete, aber nicht unmittelbar aus der Anschauung erkennbare Zusammenhänge nachweisen zu können, war dem CUSANER nichts Neues. Er kannte Ähnliches schon längst aus den von ihm mit Leidenschaft studierten NEUPLATONISCHEN Schriften; später zitiert er[26] als maßgebliche Autorität die Schrift *De divinis nominibus* des von ihm so hoch verehrten PSEUDO-DIONYSIOS[27]. Das von ihm selbst verwendete Verfahren ist viel feiner und besser durchdacht: es ist die sog. *visio intellectualis*, die bereits in der *Docta ignorantia* I, 4 und etwas eingehender in *De coniecturis* II, 2 und dann ganz genau in *De beryllo* geschildert und auch in den mathematischen Schriften immer wieder angewendet wird[28].

Die Erkenntnis ist für den CUSANER im wesentlichen von dreifacher Art: *sensibilis*, *rationalis* und *intellectualis*. Die Dinge der Sinnenwelt sind ihrem Wesen nach durchaus unvollkommen, wie etwa eine auf einer Tafel eingeritzte Figur. Nicht von diesen Gebilden handelt der Mathematiker, sondern von den nur in seiner Vorstellung vorhandenen und rein gedachten Figuren[29]. Was hierbei durch die gewöhnliche Schlußweise hergeleitet werden kann, würde vom CUSANER in den Bereich der rationalen Erkenntnis verwiesen werden. Tiefer dringt die *visio intellectualis*, die als letztes Hilfsmittel dienen muß, wenn die rationalen Methoden versagen. Dies tritt z. B. bei Betrachtung unendlich großer Gebilde ein, wie sie in der *Docta ignorantia* I, 14 und I, 15 behandelt werden. Vermöge der *visio intellectualis* wird das unendliche Dreieck gleichzeitig auch als Kreis angesehen. Ähnlich liegen die

Dinge bei Untersuchung unendlich kleiner Gebilde; nur in diesem Bereich ist es möglich, daß Sehne und Bogen zusammenfallen[30]. Etwas anders muß man vorgehen, wenn es gilt, den Kreis zu quadrieren. Das ist in der Welt des Gedachten grundsätzlich unmöglich; hingegen läßt sich die Quadratur des Kreises im Bereich des Handgreiflichen immer genauer und genauer vollziehen — schließlich so genau, daß ein sinnfälliger Unterschied überhaupt nicht mehr feststellbar ist[31].

In der *visio intellectualis* und allem, was mit ihr zusammenhängt, steckt der entscheidende außermathematische Bestandteil der CUSANISCHEN Mathematik. Gewiß ist dieses Verfahren vom streng wissenschaftlichen Standpunkt aus völlig unzulässig, aber es wird mit soviel Takt verwendet, daß im Grunde nur äußere Einzelergebnisse unrichtig werden; der tiefere Zusammenhang ist fast immer richtig erfaßt. Dieses feine Empfinden für das, was möglich und was unmöglich ist, macht die eigentliche Stärke des CUSANERS auf mathematischem Gebiet aus. Es läßt uns die vielen Unvollkommenheiten in der Einzeldurchführung vergessen und nötigt uns die höchste Achtung vor dem kühnen Denker ab, der es als Nichtfachmann gewagt hat, mit seinen noch gänzlich unzureichenden Hilfsmitteln bis zur Untersuchung funktioneller Zusammenhänge vorzustoßen, deren Bedeutung selbst dem tüchtigsten seiner Zeitgenossen nur von ferne dämmerte.

Das entscheidend Neue, was der CUSANER mit seiner *visio intellectualis* gefunden hat, ist das Prinzip der *coincidentia oppositorum*, das ihm auf der Rückfahrt von Konstantinopel im Jahre 1437/38 eingebungsgleich aufgegangen ist. In der *Docta ignorantia* vom Frühjahr 1440 wird ein erster Überblick über die Kraft der neuen Betrachtungsweise gegeben, und das unter fortwährender Heranziehung mathematisierender Schlußweisen, die jedoch nicht im Sinne strenger oder gefühlsmäßiger Fachbetrachtungen, sondern in sinnbildlich vergleichender Form verwendet werden. Der CUSANER will z. B. in I, 3 klarmachen,

Die Kreisquadratur[1]

(Quadratura circuli)

Ed. norimb., pag. 5

Die Kreisquadratur

des Herrn Kardinal Nikolaus von Cues, des Legaten und Bischofs von Brixen.

Zwar haben uns eine höhere Betrachtung und das allgemeine Beste schon lange von geometrischen Studien abgezogen, aber zwischen den zahllosen ernsten Sorgen, die mit dem Amt eines päpstlichen Gesandten verbunden sind, mischte sich ergötzend in die Gespräche der Gelehrten die Behauptung von der wissensmöglichen, aber nicht gefundenen Quadratur des Kreises; neulich haben wir sie zu Pferde immer wieder überdacht und dann zusammengeschrieben, was wir erreicht haben[2].

Wir lesen nicht, daß irgend jemand der Erkenntnis dieses Sachverhaltes näher gekommen ist als Archimedes, der zuerst aufzeigte, daß ein Rechteck aus dem Halbmesser und dem halben Umfang des Kreises gleich der Kreisfläche ist. Das muß notwendig so sein, wenn das Folgende gelten soll: Nach allgemeiner Übereinkunft ist gleich, was weder größer noch kleiner ist[3]. In allen regelmäßigen Vielecken gleichen Umfangs — in dieser Schrift handeln wir nur von solchen — ist das Rechteck aus dem Halbmesser des Inkreises und dem halben Umfang gleich der Vieleckfläche[4]. Euklid hat gezeigt, daß man leicht das geometrische Mittel aus dem fraglichen Halbmesser und dem halben Umfang bilden kann[5].

Da dieses Mittel die Seite des flächengleichen Quadrates ist, kennt man aus der ausgestreckten Umfangslinie auch die Quadratur des Kreises. Und dies ist der sicherste Nachweis. Aber indem Archimedes des Glaubens war, vermittels seiner Spirale das Erstere gefunden zu haben, hat er die Wahrheit verfehlt. Die Spirale läßt sich nämlich nur dadurch beschreiben, daß sich ein Punkt in der nämlichen Zeit über den Halbmesser hin bewegt, in der der Halbmesser durch eine Umdrehung den Kreis beschreibt. Die Beschreibung der Spirale setzt also jene Bewegungen voraus, die sich verhalten wie der Halbmesser zum Umfang. Er setzt also voraus, was er sucht. Es läßt sich leichter eine Strecke gleich der Kreislinie geben als die Spirale richtig darstellen[6].

Wir gehen hier von der Überlegung aus, daß Dreieck und Kreis der Fläche nach Extreme bilden. Im Gegensatz zum Kreis, wo Inkreis und Umkreis zusammenfallen, weichen im Dreieck Inkreis- und Umkreishalbmesser am stärksten voneinander ab. Dort ist der Umkreishalbmesser am größten, der Inkreishalbmesser am kleinsten, und ihre Summe ist am kleinsten; umgekehrt ist die Summe im Kreis gleich dem Kreisdurchmesser und am größten[7]. Deshalb wissen wir, daß alle dazwischen liegenden umfangsgleichen regelmäßigen Vielecke entsprechend ihrer Fläche in jenen Strecken sich der Gleichheit mit dem Kreishalbmesser nähern. Wenn also eine Größe bezeichnet wird als Überschuß des Kreishalbmessers über den Inkreishalbmesser im Dreieck, und eine andere Größe, um die der Kreishalbmesser kleiner ist als der Umkreishalbmesser am Dreieck, dann wird sich jedes dazwischen liegende Vieleck entsprechend seiner Fläche im Über-

schuß seines Inkreishalbmessers über den des Dreiecks und im Unterschied zwischen seinem Umkreishalbmesser und dem des Dreiecks proportional verhalten[8]. Denn da sich jene Größen verändern, weil die Flächen verschieden groß sind, kann ihr Verhältnis kein anderes sein als das Verhältnis der Flächen. Also muß notwendig gelten: Wie sich Überschuß zu Überschuß verhält, so verhält sich Unterschied (*diminutio*) zu Unterschied, da die Fläche der einen Verschiedenheit ebenso folgt wie der anderen, und der einen nicht mehr als der anderen. Es werden also in allen Vielecken Überschuß und Unter-
pag. 6 schied, da sie sich so zueinander verhalten, in der nämlichen Proportion stehen. Wenn also e i n Verhältnis gegeben ist, und wenn man diese beiden Beträge in einem bekannten Vieleck kennt, dann kennt man sie auch im Kreis. Und weil Überschuß und Unterschied im Kreis zusammen gleich dem Halbmesser des Inkreises im Dreieck sind, wie von selbst klar ist, deshalb hätte man auch den Halbmesser des isoperimetrischen Kreises und alles Gesuchte, wenn man entsprechend dem gefundenen Verhältnis den Inkreishalbmesser des Dreiecks teilen und den größeren Abschnitt eben diesem Inkreishalbmesser des Dreiecks hinzufügen würde.

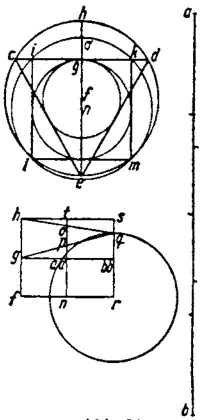

Abb. 21.

Dies wollen wir Dir auf folgende Weise klarer machen: Die Strecke *ab* werde gedrittelt und Dreieck *cde* gebildet. Auf der Seite *cd* werde *ik* gleich dem vierten Teil der Strecke *ab* angetragen und daraus Quadrat *iklm* gebildet. Man zeichne die Inkreise und Umkreise.

Für das Dreieck sei der Inkreishalbmesser *fg*, der Umkreishalbmesser *fh*, für das Quadrat sei der Inkreishalbmesser *ng*, der Umkreishalbmesser *no*. Dann werde *fh* mit dem Mittelpunkt *g* gezeichnet. Aus den Punkten *f*, *g*, *h* ziehe man Gerade von beliebiger Länge und dann zu *fh* gleichlaufend[9a] *tn* mit dem Mittelpunkt *aa*. Dann werde der Inkreishalbmesser eines beliebigen isoperimetrischen Vielecks, z. B. des Quadrats, gleich *np* angetragen, und der Umkreishalbmesser gleich *no*. Lege nun aus *g* durch *p* eine Gerade von unbegrenzter Länge und ebenso eine Gerade aus *h* durch *o*; der Schnittpunkt beider sei mit *q* bezeichnet. Dann lege man durch *q* zu *fh* die Parallele *sr* mit dem Mittelpunkt *bb*. Ich behaupte: *rq* ist der Halbmesser des gesuchten Kreises, dessen Umfang gleich der Strecke *ab* ist[10].

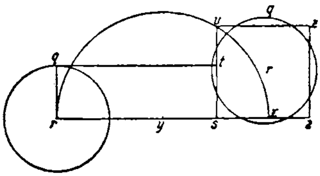

Abb. 22*.

Dies läßt sich auf vielerlei Arten leicht beweisen. Die vorige Figur werde beibehalten. Angenommen, die Strecke *gbb* entspreche der Flächendifferenz zwischen Dreieck und isoperimetrischem Kreis, und aus *rs* werde eine Gerade immer gleichlaufend gegen *fh* zu bewegt. Offenbar schneiden *hq* und *gq* auf ihr alle Differenzen aus zwischen den Inkreis- und Umkreishalbmessern in allen Vieleckfiguren vom Dreieck bis zum Kreis, wo Inkreis und Umkreis zusammenfallen. Ferner steht fest, daß diese bewegte Gerade auf *bbg* gleichzeitig alle Flächendifferenzen zwischen Dreieck und Kreis abschneidet; denn je kleiner die Differenz der besagten Halbmesser ist, desto größer ist die Fläche. Also ist der Kreis der Fläche nach die größte Figur, weil diese Halbmesser

dort zusammenfallen, und das Dreieck die kleinste, weil sie sich dort am stärksten unterscheiden. Die bewegte Gerade sei *tn*, die im Punkte *aa* die Gerade *gbb* schneidet; *po* sei die Halbmesser-Differenz im Quadrat. Wenn also *gbb* der Flächendifferenz von Dreieck und isoperimetrischem Kreis entspricht, dann entspricht *gaa* der Flächendifferenz von Dreieck und Quadrat. Und weil *np* nach Voraussetzung der Halbmesser des Inkreises im Quadrat ist, und *aap* sein Überschuß über den Inkreishalbmesser *fg* im Dreieck, wird *bbq* der Überschuß des Halbmessers im isoperimetrischen Kreis über den Inkreishalbmesser im Dreieck sein; denn *bbg* verhält sich zu *aag* wie *bbq* zu *aap*, wie bekannt ist. Es entsprechen aber die Unterschiede der Inkreishalbmesser in isoperimetrischen Vielecken den Differenzen der Flächen; die Flächendifferenz in regelmäßigen isoperimetrischen Vielecken ergibt sich nämlich nur aus der Differenz der Inkreishalbmesser. Denn, wie bekannt, entsteht die Fläche als Produkt aus dem besagten Halbmesser, der sich in den verschiedenen
pag. 7 derartigen Figuren ändert, und dem halben Umfang, der immer der nämliche bleibt. Wenn Du also die Strecke *bbs*, d. h. den Betrag der beiden Halbmesserüberschüsse, dem Überschuß der Kreisfläche über das Dreieck entsprechen lässest, dann wird im Quadrat ein derartiger Flächenüberschuß einer Strecke entsprechen, die gleich ist den beiden Strecken *to* und *paa*, und weil das Verhältnis dieser Strecken zu *sbb* das gleiche ist wie das Verhältnis von *paa* zu *bbq*, deshalb gilt der nämliche Schluß wie oben. Oder, wenn Du behauptest, die Dreieckfläche sei kleiner als die Kreisfläche entsprechend der Strecke *hg*, dann wird die Quadratfläche kleiner sein entsprechend der Strecke *po*[11].

Aber wenn Du fernerhin Einwendungen machst und behauptest, der Kreishalbmesser sei kleiner, z. B.: er ende im Mittelpunkt *u* zwischen *s* und dem Endpunkt der Linie *g*, so daß *ru* der Halbmesser des isoperimetrischen Kreises ist; wenn dann *us* so verlängert wird, daß die entstehende Strecke [*ux*] gleich *ru* wird — so entsteht *rx* — und ebenso *fh* zu *fz* gleich *rx;* dann ziehe *xz*, lege aus *u* die Geraden nach *g* und *h*, bezeichne ihre Schnittpunkte mit *tn* als *2* und *9* und verlängere *tn* bis zu *zx*, und so sei *ccn* gleich *rx*. Ich behaupte: Wenn der Halbmesser des Inkreises im isoperimetrischen Kreis zum Inkreishalbmesser des Dreiecks den Betrag *bbu* hinzufügt, dann fügt der Inkreishalbmesser im Quadrat die Strecke *aa2* hinzu.

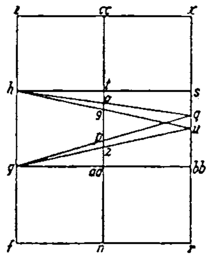

Abb. 23

Wenn also der Inkreishalbmesser im Quadrat die Strecke *aap* hinzufügt, dann fügt der Halbmesser des isoperimetrischen Kreises *bbq* hinzu. Das ist von selbst klar, wenn sich die zugefügten Strecken verhalten wie *bbu* zu *aa2* und die zugefügte Strecke im Quadrat bekannt und gleich *aap* ist. Also wird sie im Kreis gleich *bbq* sein, da sich *aap* zu *bbq* verhält wie *aa2* zu *bbu*.

Daß aber dies das Verhältnis ist, läßt sich beweisen[12]. Wenn man *ru* als Inkreishalbmesser im Kreis annimmt, dann ist *ux* der Umkreishalbmesser; beide fallen im isoperimetrischen Kreis zusammen. Es ist klar, daß *rx* die Summe aus diesen beiden Halbmessern ist; *fz* ist ihr gleich und gleich der Summe aus dem Inkreis- und Umkreishalbmesser im Dreieck. In allen Vielecken zwischen Dreieck und Kreis werden diese beiden Halbmesser zusammen weder kleiner sein als *fz* noch größer als *rx*, also immer gleich.

Im Quadrat wird also *ncc* gleich diesen beiden Halbmessern sein; *29* ist notwendig gleich *po* — Dreieck *ghq* ist gleich Dreieck *ghu*, da *qu* und *gh* parallel sind und ebenso *o2* parallel zu *gh* —; deshalb ist *92* gleich *po*, wie Dir aus Euklid I, 37 und VI, 4 bekannt ist. *po* ist aber der Überschuß des Umkreishalbmessers über den Inkreishalbmesser im Quadrat, also auch *29*; und da *n2* gleich *cc9* ist, wird also *n2* gleich dem Inkreishalbmesser im Quadrat und *2cc* gleich dem zugehörigen Umkreishalbmesser. Wenn man also annimmt, daß der Kreishalbmesser um *bbu* größer ist als der Inkreishalbmesser im Dreieck, dann ist der Inkreishalbmesser im Quadrat notwendig um *aa2* größer als der Inkreishalbmesser im Dreieck. Diese zugefügten Strecken könnte man als Flächenüberschüsse über die Dreieckfläche bezeichnen, da bei regelmäßigen isoperimetrischen Vielecken die Flächenüberschüsse einzig und allein aus diesen Streckenüberschüssen entstehen. Das Zugefügte verhält sich also wie *aa2* zu *bbu*, was zu beweisen war. Und ebenso wie im Quadrat kann man bei allen Vielecken vorgehen. Damit steht der Satz fest[13].

Anders: Der Überschuß der Kreisfläche über die
pag. 8 Dreieckfläche ist der größte, die Differenz zwischen Inkreis- und Umkreishalbmesser ist Null oder die schlechthin kleinste, weil sie nicht kleiner sein kann. Aber die Differenz des Inkreis- und Umkreishalbmessers im Dreieck ist die größte und der Überschuß der Dreieckfläche über sich selbst Null oder der schlechthin kleinste. Eine Strecke *ab* entspreche der Differenz der beiden Halbmesser im Dreieck und dem Überschuß der Kreisfläche über die Dreieckfläche. *ab* sei die Seite des Quadrats *abcd* und entspreche der Differenz der Halbmesser [im Dreieck] und dem schlechthin kleinsten Flächenunterschied des Drei-

ecks von seiner eigenen Fläche; *cd* entspreche dem Überschuß der Kreisfläche über die Dreieckfläche und dem schlechthin kleinsten Unterschied der fraglichen Halbmesser [im Kreis]. Dann werde die Diagonale *bc* gezogen. Ich behaupte: In allen zwischen Dreieck und Kreis gelegenen Vielecken können die Strecken, die den Flächenüberschuß über das Dreieck darstellen, zusammen

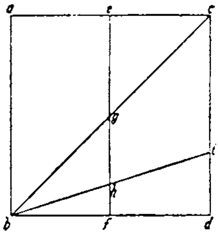

Abb. 24.

mit der Differenz der Halbmesser weder größer noch kleiner sein als *ab* oder *cd*, wie von selbst klar ist. Es werde nun *ef* gleich und gleichlaufend zu *ab* und *cd* gelegt und mit *bc* in *g* geschnitten; *ge* entspreche der Differenz der Halbmesser im Quadrat. Es ist klar, daß *gf* dem Überschuß der Quadratfläche über die Dreieckfläche entspricht. Der Überschuß der Quadratfläche über die Dreieckfläche verhält sich zum Überschuß der Kreisfläche über die Dreieckfläche wie *gf* zu *cd*. Auf *gf* trägt man den Überschuß *hf* des Inkreishalbmessers im Quadrat über den im Dreieck an; dann ziehe man aus *b* durch *h* nach *cd* hin eine Gerade mit dem Schnittpunkt *i*. Ich behaupte: *di* ist der Überschuß des Halbmessers im isoperimetrischen Kreis über den Inkreishalbmesser im Dreieck. Es verhält sich nämlich *fg* zu *dc* wie *fh* zu *di*. Der Flächenunterschied der regelmäßigen isoperimetrischen Vielecke gegenüber der Dreieckfläche ergibt sich nur aus dem Unterschied zwischen Inkreishalbmesser im Vieleck und Inkreishalbmesser im Dreieck. Das Verhältnis des Flächenüberschusses über die Dreieckfläche ist also das Verhältnis der Differenzen zwischen dem Inkreishalbmesser in den Vielecken und dem Inkreishalbmesser im Dreieck. Damit ist das Gesuchte klar[14].

pag. 9 Daraus wird sich jetzt leicht ein vollkommenes Wissen über Sehnen und Bögen entwickeln lassen. Wenn das Verhältnis zwischen dem Überschuß des Inkreishalbmessers in einem auf das Dreieck folgenden regelmäßigen isoperimetrischen Vieleck über den Inkreishalbmesser im Dreieck und dem Überschuß des Umkreishalbmessers am Dreieck über den Umkreishalbmesser am Vieleck immer das gleiche ist, und wenn diese Überschüsse zusammen mit der Differenz oder dem Pfeil gleich dem Pfeil der Dreieckseite sind, wie aus dem Früheren klar hervorgeht, dann hat man, wenn man das Verhältnis dieser Überschüsse kennt — dieses Verhältnis wird von einer Zahl nicht genau erreicht, so wenig wie $\sqrt{2}$ —, einen Weg gefunden zu allem, was man über Sehnen und Bögen wissen kann[15].

Das Verhältnis der Überschüsse kann man näherungsweise finden wie folgt: Der Umkreishalbmesser am Dreieck sei 14, der Inkreishalbmesser 7, sein Quadrat 49, das Quadrat der halben Dreieckseite dreimal soviel, also 147, das Quadrat des Umkreishalbmessers viermal soviel, also 196. Die halbe Quadratseite beträgt demnach die Wurzel aus neun Sechzehnteln vom Quadrat der halben Dreieckseite, d. h. $\sqrt{82\frac{11}{16}}$; dies ist auch der Halbmesser des Inkreises. Der Umkreishalbmesser wird die Wurzel aus dem Doppelten sein, d. h. $\sqrt{165\frac{6}{16}}$. Zieht man $\sqrt{49}$ ab von $\sqrt{82\frac{11}{16}}$, dann ist die Differenz der Überschuß des Inkreishalbmessers im Quadrat über den im Dreieck, und das ist etwas mehr als 2. Zieht man $\sqrt{165\frac{6}{16}}$ ab von $\sqrt{196}$ [dann ist die Differenz der Überschuß des Umkreishalbmessers am Dreieck über den am Quadrat], und das ist etwas mehr als 1. Damit hast Du die Überschüsse, und ihr Verhältnis ist dasjenige, durch das man alles untersuchen kann. Wenn man nämlich diese Überschüsse vom Pfeil der Dreieckseite, d. h. von 7, abzieht, dann bleibt der Pfeil der Quadratseite. Teilt man 7 im vorgenannten Verhältnis der Überschüsse und fügt man den größeren Teil dem Halbmesser des Dreieck-Inkreises an, dann hat man den Halbmesser des isoperimetrischen Kreises[16].

Auf diese Weise kann man auch aus dem Quadrat der Dreieck- oder Quadratseite das Quadrat einer beliebigen Vieleckseite finden, und aus dieser Kenntnis und dem Verhältnis der Überschüsse kommt man zum Pfeil und Inkreishalbmesser. Und so kennt man die Sehne[17]. Das ist die letzte Vollendung der geometrischen Kunst. Wir lesen nicht, daß die Alten soweit vorgestoßen sind. Jetzt ist auch die Kunst der Geometrischen Verwandlungen vollendet, die wir früher nicht so eingehend, aber, was die Kreisquadratur anlangt, hinreichend behandelt haben[18]. Und wir glauben, daß von dem, was man auf geometrischem Gebiet wissen kann, jetzt nichts mehr verborgen bleiben kann, wenn sich einer mit Hingabe diesen Untersuchungen widmen will. Das Vorliegende habe ich vor allem geschrieben, um die Kraft des Schlusses von den Koinzidenzen aufzuweisen; vermittels dieser Kunst kann man auf jedem Gebiet das Verborgene durchdringen. Einzig und allein aus der Koinzidenz der In- und Umkreishalbmesser, die in allen Vielecken verschieden sind, und nur im Kreis zusammenfallen, hat uns diese Untersuchung zum Ziel geführt.

Lob sei Gott.

Anmerkungen zur Kreisquadratur

(Quadr. circ.)

(Zitiert als *QC* mit hochgestellter Verweisungsziffer, also z. B. *QC*[9])

[1] Die *Quadr. circ.* fällt in eine der aktivsten Perioden des CUSANERS. Eben erst hat er die *Idiota*-Schriften abgeschlossen (vgl. *QM*[1]) und befindet sich mitten in den Vorbereitungen für die große Legation, die ihn vom Anfang des Jahres 1451 (Abreise von Rom am 31. XII. 1450) bis zu Anfang April 1452 (Rückkehr nach Brixen) auf seinem Zuge durch Deutschland führt und ihm bei der Fülle der zu bewältigenden kirchlichen und diplomatischen Aufträge keine Muße für mathematische Studien läßt. Diese werden vielmehr erst wieder im Zusammenhang mit dem nächsten Aufenthalt in Rom (15. III. bis 29. V. 1453) aufgenommen.

Auf welche Vorlage sich der CUSANER hinsichtlich der ARCHIMEDISCHEN Spirale gestützt hat (s. oben S. 59), ist noch ungeklärt. Möglicherweise wurde er von seinen gelehrten Freunden auf einen — gegenwärtig verschollenen — lateinischen Text hingewiesen, der entweder die vollständige Wiedergabe der Spiralen-Abhandlung oder den Auszug in PAPPOS IV, 19/22 und 29 enthalten haben mag. Dieser Text wird wohl auch die Vorlage für ORESME (s. *Einführung*, S. XXX) gewesen sein. Wir halten es jedoch für wahrscheinlicher, daß der CUSANER kurz vor Abfassung der *Quadr. circ.* in die lateinische ARCHIMEDES-Übersetzung des JAKOB VON CREMONA Einsicht genommen hatte, die auf Befehl des Papstes angefertigt und vermutlich im Spätherbst 1450 abgeschlossen worden war. Offenkundig fehlte dem vielbeschäftigten Kardinal die Zeit zur genaueren Durcharbeit der Texte, und nur eine Einzelheit machte tieferen Eindruck auf ihn, nämlich die Kreisrektifikation vermittels der ARCHIMEDISCHEN Spirale. Interessanterweise ist dem CUSANER der eigentliche Kernpunkt dieser Methode nicht aufgegangen (vgl. Anmerkung 6): er hält sie für unzureichend und wird vielleicht gerade durch diesen Umstand veranlaßt, das Ergebnis seiner neuesten Überlegungen zusammenzufassen.

Inhaltlich bietet die *Quadr. circ.*, die wohl im Dezember 1450 entstanden ist, eine Weiterbildung dessen, was schon in den *Compl. arithm.* angedeutet worden war, jedoch nunmehr in klarerer Form. In der Einleitung sagt der CUSANER, er habe sich schon seit längerer Zeit nicht mehr mit mathematischen Gegenständen beschäftigt: darnach müssen die *Transm. geom.* und die *Compl. arithm.* wesentlich älter sein als die *Quadr. circ.* Die vorstehend erwähnte Bemerkung ist das Hauptargument für die Übernahme der Datierung der *Transm. geom.* aus der *Innsbrucker* Handschrift (*GT*[1]).

Auch die *De circ. quadr.* vom 12. VII. 1450 fällt noch vor die *Quadr. circ.*: sie schließt sich ziemlich eng an die *Transm. geom.* an, wird jedoch vom CUSANER mit Recht nicht als eine neuartige geometrische Leistung betrachtet; denn sie handelt in erster Linie von Existenzproblemen im Stil der älteren Auffassung und den damit zusammenhängenden metaphysischen Fragen, während das Fachmathematische sehr zurücktritt.

Wir kennen von der *Quadr. circ.* keine handschriftliche Fassung ‹vgl. jedoch H. G. SENGER, Cusanus-Studien IX, 1972, 9—17›, nur den ziemlich sorgfältigen *Nürnberger* Druck, der auf eine Abschrift aus dem Besitz REGIOMONTANS zurückgeht: dieser hatte sie wohl von seinem Lehrer und Freund PEURBACH erhalten, mit dem der Kardinal seit 1450 in nähere Beziehung getreten war. Die Abhandlung ist nach diesem Druck in die *Basilea* übernommen worden. Sie stellt die entscheidende Vorlage für das erste Buch der *Compl. math.* dar, das im Sommer 1453 entstanden ist — niedergeschrieben in der klar ausgesprochenen Absicht, den neuen Gedanken der *Quadr. circ.* in methodisch möglichst einwandfreier Form und mit ausführlicher Begründung darzubieten.

[2] Wir sehen in der erwähnten „höheren Betrachtung" eine Anspielung auf die *Idiota*-Schriften (vgl. *QM*[1]); vielleicht ist das wissenschaftliche Gespräch über die Kreisquadratur schon in den Sommer 1450 zu verlegen und zunächst zum Anlaß für die Abfassung der *De circ. quadr.* geworden.

[3] Diese Formulierung klingt an den Text der *TG*, S. 22 und *QM*, S. 41 an; vgl. auch *CM*, S. 72 und die nähere Ausführung in *CM* I, 6.

[4] Gemeint ist die Formel $f_n = \varrho_n \cdot \frac{u}{2}$. Wir finden wiederum, wie schon in den *TG*, S. 5, nur die Gleichheit der Seiten hervorgehoben; die der Winkel (woran die Existenz des Inkreises hängt) bleibt unerwähnt. In *CM* I, 1 wird der Satz allgemein bewiesen.

[5] Gemeint ist *Camp.* VI, 9 (älterer = 10 neuerer Zählung) = *Bradw.* III, 3; *concl.* 4, wo vermittels des Höhensatzes konstruiert wird. Vgl. die unten vorgeführte Konstruktion (Abb. 22) mit eigenartigem, an die Figur gesetztem Text, ferner *CM*, S. 72.

[6] ARCHIMEDES hatte die Kurve in *De spiralibus, def.* 1 erklärt als den geometrischen Ort eines Punktes, der den Fahrstrahl mit fester Geschwindigkeit durchläuft, während sich dieser mit fester Winkelgeschwindigkeit um den Pol dreht. Wir nehmen an, daß sich der laufende Punkt (r, φ) der Kurve nach einer vollen Umdrehung im Punkt $(a, 2\pi)$ befindet, und daß T die zu einem vollen Umlauf, t die zur Winkeldrehung φ benötigte Zeit ist. Dann ist $\frac{r}{a} = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{t}{T}$.

ARCHIMEDES hatte in *prop.* 12 gezeigt, daß sich Fahrstrahlen mit dem nämlichen Zwischenwinkel um die nämliche Strecke unterscheiden, und in *prop.* 14 die Verhältnisgleichung $r : a =$ Bogen $a\varphi$: Umfang $2a\pi$ (auf dem umschließenden Kreis des ersten Umlaufs) aufgestellt. Er konnte also die Spirale durch fortgesetztes Winkelhalbieren von einem beliebig gewählten Endpunkt $r = a$ ab punktweise und „rein geometrisch" (d. h. mit Zirkel und Lineal) konstruieren, hat dies jedoch nicht einmal angedeutet. In *prop.* 18 zeigt er, daß der Umfang $2a\pi$ des „erzeugenden Kreises" gleich der Subtangente im Endpunkt $r = a$ des ersten Spiralen-Umlaufs ist.

Der CUSANER folgert aus der Definition die (von ARCHIMEDES selbst gar nicht aufgestellte) Beziehung $r : a\varphi = a : 2a\pi$ und nimmt an ihr mit Recht Anstoß, weil Ungleichartiges (Strecken und Bögen) ins Verhältnis gesetzt werden müßte. Vgl. auch den Text in *CM*, S. 69 und die spätere Erwähnung in *PM*, S. 170.

[7] Vgl. *TG*, S. 7 und *CM*, S. 70. Interessant ist die Behauptung, daß $r_n + \varrho_n$ an den isoperimetrischen Vielecken mit zunehmendem n zunimmt. Ist r der Halbmesser des isoperimetrischen Kreises, 4φ der zum isoperimetrischen n-Eck gehörige Mittelwinkel $\frac{2\pi}{n}$, so ist $\varrho_n = \frac{2r\varphi}{\operatorname{tg} 2\varphi}$ und $r_n = \frac{2r\varphi}{\sin 2\varphi}$, also $r_n + \varrho_n = \frac{2r\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}$ eine Funktion, die bei Übergang von $n = 3$ bis zu $n \to \infty$, d. h. von $\varphi = \frac{\pi}{6}$ bis zu $\varphi \to 0$, monoton bis $2r$ zunimmt, wie behauptet. Vgl. jedoch unten Anmerkung 12.

[8] Aus der Zunahme von f_n mit abnehmendem $r_n - \varrho_n$ schließt der CUSANER auf die „gleichmäßige" Abnahme von $f - f_n$ und $r_n - \varrho_n$ mit wachsendem n. Dies würden wir in die Form der Proportionalität $\frac{f - f_3}{f - f_n} \sim \frac{r_3 - \varrho_3}{r_n - \varrho_n}$ kleiden, woraus sich sogleich die vom CUSANER benutzte Proportionalität

$\frac{f-f_3}{f_n-f_3} \sim \frac{r_3-\varrho_3}{(r_3-\varrho_3)-(r_n-\varrho_n)}$ ergibt. Die rechte Seite denkt sich der CUSANER in der Form $\frac{(r-\varrho_3)+(r_3-r)}{(\varrho_n-\varrho_3)+(r_3-r_n)}$ geschrieben. Daraus wird klar, weshalb er die „Überschüsse" $r-\varrho_3$ bzw. $\varrho_n-\varrho_3$ und die „Unterschiede" r_3-r bzw. r_3-r_n einführt. Dies wird im nachfolgenden Text etwas genauer angedeutet, wobei der CUSANER die Beziehung $r_3=2\varrho_3$ benutzt und deshalb von der Teilung der Strecke $r_3-\varrho_3=\varrho_3$ spricht. Das Ganze erscheint in etwas anderer Form wieder in *CM*, S. 70/72 und wird dort, in verschiedene Einzelschritte zerlegt, näher ausgeführt.

[9] Unter Abb. 22 findet sich die Unterschrift: *rq* ist der Kreishalbmesser, *rs* die Hälfte von *ab* oder dem Kreisumfang, *rqts* das Rechteck gleich dem Kreis, *sx* gleich *rq*, *y* der Mittelpunkt zwischen *r* und *x* und Mittelpunkt des Kreises *ryx*, *su* das geometrische Mittel zwischen *rs* und *sx* nach EUKLID VI, 9, *suz*2 das Quadrat, das zum Kreis des Halbmessers *rq* flächengleich ist.

[9a] Die lateinische Vorlage hat das Fachwort *aequidistans*, das wir hier und im Folgenden immer durch „gleichlaufend" wiedergeben. Es tritt schon bei CAMPANUS auf.

[10] Die vom CUSANER behaupteten Proportionalitäten lassen sich sogleich an der beigesetzten Figur ablesen und auf die Form bringen:

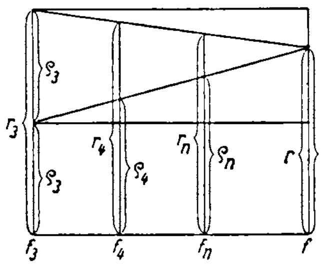

Abb. 99.

$$\frac{f-f_3}{r_3-\varrho_3(=\varrho_3)} \sim \frac{f-f_4}{r_4-\varrho_4} \sim \frac{f-f_n}{r_n-\varrho_n}.$$

[11] Jetzt wird die Proportionalität von $f-f_n$ zu $r-\varrho_n$ auf Grund der Beziehungen $f_n=\varrho_n\cdot\frac{u}{2}$ und $f=r\cdot\frac{u}{2}$ besonders hervorgehoben — eine Entsprechung, die sich für uns unmittelbar aus der Figur zur vorigen Anmerkung entnehmen läßt:

$$\frac{r-\varrho_3}{r_3-\varrho_3} \sim \frac{r-\varrho_4}{r_4-\varrho_4} \sim \frac{r-\varrho_n}{r_n-\varrho_n}\left[\approx\frac{2}{3}\right].$$

[12] Hier nimmt der CUSANER an, daß z. B. $r=\frac{1}{2}(r_3+\varrho_3)$ ist, also $\frac{r-\varrho_3}{r_3-\varrho_3}=\frac{1}{2}=\frac{r-\varrho_n}{r_n-\varrho_n}$. Daraus würde $r_3+\varrho_3=r_4+\varrho_4=r_n+\varrho_n=2r$ folgen. Daß dies einen Widerspruch gegenüber

der in der Einleitung hervorgehobenen Zunahme von $r_n + \varrho_n$ mit wachsendem n darstellt (vgl. Anmerkung 7), bleibt unerwähnt.

[13] Im Grunde wird also nur gesagt, daß die Verhältnisgleichheit von $\frac{r-\varrho_3}{r_3-\varrho_3}$ mit $\frac{r-\varrho_n}{r_n-\varrho_n}$ an der Abb. 21 oder 23 unabhängig von der Größe des Schlußwertes r ist. — EUKLID I, 37 = *Bradw.* II, 2; *concl.* 9 behandelt die Flächengleichheit von Dreiecken über der nämlichen Grundlinie und zwischen den nämlichen Parallelen, EUKLID VI, 4 die Proportionalität entsprechender Strecken an winkelgleichen Dreiecken.

[14] Das hier Vorgetragene ist eine Variante der vorhergehenden Konstruktion; ihre Einzelheiten lassen sich sogleich aus der beigesetzten Figur übersehen.

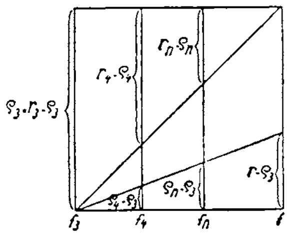

Abb. 100.

[15] Mit diesem Absatz beginnt im *Nürnberger* Druck ein eigener Abschnitt, der die Überschrift *De sinibus et chordis* trägt und mit ganz geringen Textänderungen in *CM*, S. 89/91 übergegangen ist. Eine dieser Änderungen bezieht sich auf die hier nur erwähnte Irrationalität von $\sqrt{2}$, bei der sich in den *Compl. math.* auch noch ein Hinweis auf den Beweis vermittels des Gegensatzes von Gerade und Ungerade vorfindet.

[16] Es handelt sich um den nicht voll ausgeführten Versuch einer Berechnung von r aus $\frac{r-\varrho_3}{\varrho_4-\varrho_3} \sim \frac{r_3-\varrho_3\ (=\varrho_3)}{(\varrho_4-\varrho_3)+(r_3-r_4)}$. Benutzt wird $\varrho_3 = 7$, also $r_3 = 14$, $\frac{1}{2}s_3 = \sqrt{147}$, $u = 3s_3 = 6\sqrt{147} = 4s_4$, $\frac{1}{2}s_4 = \varrho_4 = \sqrt{82\frac{11}{16}}$, $r_4 = \varrho_4\sqrt{2} = \sqrt{165\frac{6}{16}}$; dann ist $\varrho_4 - \varrho_3$ [= 2,093] > 2 und $r_3 - r_4$ [= 1,170] > 1, somit $\frac{\varrho_4-\varrho_3}{(\varrho_4-\varrho_3)+(r_3-r_4)} \sim \frac{2}{3}$; $r \sim \frac{5}{3}\varrho_3$. Bei genauerer Durchrechnung ergibt sich $r \sim 1{,}647\,\varrho_3$. Da andrerseits $u \sim 10{,}393\,\varrho_3$ ist, würde sich der (sehr unbefriedigende) Näherungswert $\pi \sim 3{,}154$ ergeben. Im *Nürnberger* Druck fehlt irrtümlich die in eckigen Klammern eingeschlossene Stelle, die wir aus dem *Pariser* Druck der *Compl. math.* ergänzt haben.

[17] Gemeint ist folgendes: Wenn man r_n^2, ϱ_n^2 als (rationale) Funktionen von s_3^2 oder s_4^2 kennt, so ist $s_n = 2\sqrt{r_n^2 - \varrho_n^2}$ und $r = \varrho_3 \left\{ 1 + \frac{\varrho_4 - \varrho_3}{(\varrho_4 - \varrho_3) + (r_3 - r_4)} \right\}$ bestimmbar, folglich auch der zu s_n gehörige Bogen $\frac{360^\circ}{n} \cdot r$ usw. Damit ist das Problem der Winkelteilung in allgemeiner Form aufgeworfen, jedoch keineswegs gelöst; denn wie man r_n^2 und ϱ_n^2 als Funktionen von s_3^2 oder s_4^2 darstellen kann, bleibt unerörtert.

[18] Hier werden also die *Transm. geom.* erwähnt, jedoch mit einer abschätzigen Bemerkung; denn nunmehr glaubt der CUSANER wesentlich weiter vorangekommen zu sein. Diese Beurteilung mag den Kardinal dazu veranlaßt haben, die *Transm. geom.* nicht mit in die *Cueser* Prachthandschrift aufnehmen zu lassen, für die er an mathematischen Abhandlungen außer den *Compl. math.* nur noch die *Pe. ; math.* bestimmte.

Anmerkungen zu den Mathematischen Ergänzungen

(compl. math.)

(Zitiert als *CM* mit hochgestellter Verweisungsziffer, also z. B. *CM*[15])

[1] Die *Compl. math.* sind das mathematische Hauptwerk des CUSANERS und wurden von diesem sehr hoch geschätzt; deshalb ließ er eine Abschrift mit in die *Cueser* Prachthandschrift seiner gesammelten Werke aufnehmen. Wir kennen zwei Fassungen der Abhandlung, eine kürzere vom Sommer 1453, die in den ersten Septembertagen zu Branzoll abgeschlossen wurde — hierüber belehrt uns der Brief an den Abt und die Mönche von Tegernsee vom 14. IX. 1453 (vgl. VANSTEENBERGHE, *Docte ignorance* S. 116) — und eine ausführlichere mit einem angefügten zweiten Buch, die am 24. XI. 1454 zu Brixen fertiggestellt wurde. Später hat der CUSANER die ganze Schrift nochmals durchgesehen und Kleinigkeiten abgeändert; insbesondere hat er in der *Cueser* Handschrift Zusätze angebracht, die zum Teil mit in den Text der späteren Abschriften und in den Druck übernommen wurden. Die kürzere Fassung ist uns aus 6 Handschriften bekannt, worunter die *Oxforder* vom 24. II. 1454 sogar älter ist als das zweite Buch. Die älteste uns erhaltene Abschrift der erweiterten Fassung scheint der *Cod. Barb.* zu sein; die übrigen uns bekanntgewordenen vier Abschriften folgen einer